

Отговорите на задачите от 1. до 12. вкл. отбелязвайте в листа за отговори.

1. Кой от изразите приема стойност, която е естествено число?

А) $\frac{17}{21} + \frac{12}{42}$ Б) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{8}}$ В) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ Г) $-\frac{11}{12} - \frac{1}{12}$

2. Стойността на израза $\frac{x+2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} + \frac{x-2017}{x+3}$ за $x = 2017$ е равна на:

А) 3 Б) 2 В) 0 Г) -2015

3. Ако средното аритметично на числата a и b е 10, а на числата a , b и c е 15, то числото c е равно на:

А) 10 Б) 15 В) 20 Г) 25

4. Дадено е уравнението $x^2 - 2x + k = 0$ с корени x_1 и x_2 , а k е реален параметър. Ако $x_1^2 + x_2^2 = 2$, то стойността на k е равна на:

А) 2 Б) 1 В) 0 Г) -1

5. Ако $4^x + 4^{-x} = 23$, то стойността на израза $2^x + 2^{-x}$ е равна на:

А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6

6. Неравенството $\log_a \frac{1}{3} > \log_a \frac{1}{4}$ е вярно, когато:

А) $a < 0$ Б) $0 < a < 1$ В) $a = 1$ Г) $a > 1$

7. Дадена е аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Ако S_n е сумата на първите n члена и $a_3 = 3a_2$, $S_n = 40a_3$, то n е равно на:

А) 10 Б) 4 В) 12 Г) 14

8. Ако $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, то стойността на $\cotg \alpha$ е равна на:

А) $\frac{5}{12}$ Б) $-\frac{5}{12}$ В) 1 Г) $\frac{1}{13}$

9. Височината към хипотенузата на правоъгълен триъгълник е $2\sqrt{5}$ cm и дели хипотенузата на части, които са в отношение 1 : 4. Дължините на катетите на триъгълника са равни на:

А) 5 cm, 10 cm Б) $\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm В) 5 cm, 20 cm Г) 4 cm, 16 cm

10. Радиусът на описаната около правоъгълник окръжност е 5 cm. Ако лицето на този правоъгълник е 48 cm^2 , то периметърът му е равен на:
 А) 20 cm Б) 28 cm В) 30 cm Г) 32 cm
11. Лицето на равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), за който $AB = 14 \text{ cm}$, $CD = 4 \text{ cm}$ и $BD = 15 \text{ cm}$, е равно на:
 А) 109 cm^2 Б) 112 cm^2 В) 44 cm^2 Г) 108 cm^2
12. Дадена е правилна триъгълна пирамида с основен ръб 6 cm и обем $6\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Дължината на околния ръб на пирамидата е равна на:
 А) 5 cm Б) 3 cm В) 6 cm Г) 4 cm

Отговорите на задачите от 13. до 17. вкл. отбелязвайте в листа за отговори.

13. Да се реши уравнението $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$.
14. За геометричната прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ е дадено, че $a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = 2^9$. Да се намери четвъртият член на прогресията.
15. Да се намери броят на двуцифрените числа, които са записани с различни цифри и се делят на 6.
16. Даден е триъгълникът ABC с $\sphericalangle BAC = 120^\circ$ и страни $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$. Да се намери дължината на ъглополовящата AL ($L \in BC$).
17. Основата на права призма е ромб. Диагоналите на призмата са 9 m и 5 m, а височината ѝ е 3 m. Да се намери дължината на страната на ромба.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите 18., 19., 20. и 21. запишете в листите за белова.

18. Да се намерят решенията на уравнението $2 \cos^2 x + \cos 4x = 0$, които принадлежат на интервала $(0; \pi)$.
19. Лицето на успоредник $ABCD$ е $56\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Да се намерят дължините на страните на успоредника, ако дължините на диагоналите AC и BD са съответно равни на 16 cm и 14 cm.
20. Основата на пирамида е квадрат. Две от околните стени са перпендикулярни на основата ѝ, а другите две сключват с нея ъгъл α . Да се намери обемът на пирамидата, ако радиусът на описаната около нея да е от наклонените околните стени окръжност е R .

21. Допълнителна задача

Нека x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$) са реални числа, всяко от които е по-голямо от 1 и $|x_i - x_{i+1}| < 1$ за $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$. Да се докаже, че:

а) $(x_i - x_{i+1}) \cdot \left(\frac{1}{x_{i+1}} - \frac{1}{x_1} \right) < 1$ за всяко $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1$.

в) $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{i+1}} \right| < \frac{i}{i+1}$ за всяко $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$.