ВЕЛИКОТЪРНОВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЙ“

ДЕВЕТИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР ЗА УЧЕНИЦИ ОТ XI И XII КЛАС

13 март 2016 г.

УВАЖАЕМИ СЪСТЕЗАТЕЛИ,

Тестът съдържа **21 задачи** по математика от **два вида**:
12 задачи със структуриран отговор и 9 задачи със свободен отговор.

Първите 12 задачи (от 1. до 12. включително) в теста са от затворен тип с четири предложени отговора, отбелязани с главните букви А, Б, В, Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте с химикал със син цвят в **листа за отговори**, а не върху теста. За да отбележите верния отговор, зачертайте със знака $\times$ кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

А Б В Г

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и зачертайте буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

А Б В Г

За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор се приема само този, чиято буква е зачеркната със знака $\times$.

Отговорите на задачите със **свободен отговор от 13. до 17. включително** запишете в **листа за отговори**.

На задачите със **свободен отговор 18., 19., 20. и допълнителната задача 21.** напишете пълните решения с необходимите обосновки в **листите за белова**.

Максималният брой точки за целия тест е 120.

Журито на турнира определя наградите сред събралите най-много точки, като присъжда и награда за най-добро решение на допълнителната задача 21.

Точковият резултат на всички участници се преобразува в оценка по шестобалната система. За учениците от XI клас тази оценка е валидна за кандидатстване през 2017 година, а за учениците от XII клас оценката е валидна за кандидатстване през 2016 и 2017 година за специалностите ***Приложна математика, Математика и информатика, Информатика, Компютърни науки*** и ***Софтуерно инженерство*** на факултет „Математика и информатика“ на ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“, за което желаещите получават заверен сертификат от факултетската канцелария. Журито определя таблицата за съответствие между точки и оценки. Долната граница за оценка Отличен (6.00) не може да бъде по-висока от 100 точки.

Време за работа – 4 астрономически часа.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

1. Стойността на израза $\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}$ е равна на:

А) $1-\sqrt{2}$ **Б)** $\sqrt{2}-1$ **В)** $1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ **Г)** $2\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$

2. Равенството $5^{\log_5(2x+1)}.6^{\log_6(2x-1)}=4x^2-x$ е вярно за:

А) $x=0$ **Б)** $x=1$ **В)** $x=2$ **Г)** $x=3$

3. Дефиниционното множество на функцията $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{4-x}}+\sqrt{x+2}$ е:

А) $x\in(-\infty;2)$ **Б)** $x\in[1;2)$ **В)** $x\in[1;2]$ **Г)** $x\in[-2;4)$

4. Дадено е уравнението $x^2-4x+a=0$ с корени x_1 и x_2, където a е реален параметър. Ако $x_1^2+x_2^2=16$, то стойността на a е равна на:

А) 4 **Б)** 2 **В)** 0 **Г)** -2

5. Решенията на системата уравнения $\left|\begin{array}{l} x^2+3y^2=4 \\ x+y^2=2 \end{array}\right.$ са:

А) $(1;1),(2;0)$ **Б)** $(1;1),(2;0),(1;-1)$ **В)** $(2;0)$ **Г)** $(1;-1)$

6. Решенията на неравенството $2x^2-3x\leq 0$ са:

А) $x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]$ **Б)** $x\in\left[-\dfrac{3}{2};-1\right)$ **В)** $x\in[-1;\infty)$ **Г)** $x\in\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$

7. Частното на геометрична прогресия е $q=2$, а сумата на първите ѝ четири члена е 30. Шестият член на прогресията е равен на:

А) 64 **Б)** 128 **В)** 32 **Г)** 12

8. Ако средното аритметично на числата $a_1,a_2,\ldots,a_6,a_7$ е равно на 1, а средното аритметично на числата $a_1,a_2,\ldots,a_6$ е равно на -1, то числото a_7 е равно на:

А) 0 **Б)** 1 **В)** 8 **Г)** 13

9. Ако $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$ и $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, то стойността на $\sin 2\alpha$ е равна на:

А) $-\dfrac{15}{17}$ **Б)** $-\dfrac{240}{289}$ **В)** $\dfrac{240}{289}$ **Г)** $\dfrac{15}{17}$

10. Дължината на окръжността, описана около триъгълник ABC със страна $BC = 4$ и $\sphericalangle BAC = 135^\circ$, е:

А) $4\sqrt{2}\pi$ **Б)** 12π **В)** $8\sqrt{3}\pi$ **Г)** 3π

11. Лицето на ромб $ABCD$ с диагонал $AC = 4\sqrt{3}$ и $\sphericalangle ABC = 120^\circ$ е равно на:

А) $2\sqrt{3}$ **Б)** 8 **В)** $6\sqrt{3}$ **Г)** $8\sqrt{3}$

12. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб $a = 8\,cm$ и лице на пълна повърхнина $S = 144\,cm^2$. Дължината на височината на пирамидата е равна на:

А) $5\,cm$ **Б)** $3\,cm$ **В)** $6\,cm$ **Г)** $4\,cm$

*Отговорите на задачите от 13. до 17. вкл. отбелязвайте в **листа за отговори**.*

13. Да се реши уравнението $\sqrt{3x^2 + 7x + 5} = 2x + 1$.

14. Три числа, сборът на които е 2, образуват аритметична прогресия. Сборът от квадратите на тези числа е $\dfrac{14}{9}$. Да се намери най-голямото от трите числа.

15. В равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$) центърът на вписаната окръжност O дели височината CD ($D \in AB$) в отношение $CO : OD = 5 : 2$, а основата AB е с $3\,cm$ по-малка от бедрото. Да се намери периметърът на триъгълника ABC.

16. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = 9\,cm$ и $AD = 6\,cm$. През върха A е построена права, перпендикулярна на BD, която пресича страната CD в точка M. Да се намери дължината на отсечката CM.

17. Призма с обем $1680\,cm^3$ е с основа трапец с основи $21\,cm$, $7\,cm$ и бедра $13\,cm$, $15\,cm$. Да се намери височината на призмата.

*Пълните решения с необходимите обосновки на задачите 18., 19., 20. и 21. запишете в **листите за белова**.*

18. Да се реши неравенството $\log_x \dfrac{4x+5}{6-5x} < -1$.

19. В окръжност с радиус R е вписан трапецът $ABCD$ ($AB \,||\, CD$) с $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ и $\sphericalangle CAB = 45^\circ$. Да се намери лицето на трапеца.

20. Основата на пирамида $ABCM$ е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB. Всички околни ръбове са равни на l. Околната стена MBC сключва с основата на пирамидата ъгъл β. Да се намери обемът на пирамидата, ако $\sphericalangle MAB = \alpha$.

21. Допълнителна задача

Дадени са функцията $f(x) = x^{2016} - 10x^{2015} + 10x^{2014} - \ldots + 10x^2 - 10x - 1$, параболата $\pi : y = \dfrac{1}{4}x^2$ и правата $g : x - 2y - 3 = 0$. Въведени са следните означения: A е точката от π, в която допирателната към π е успоредна на g ; B и D са пресечните точки на g съответно с абсцисната ос Ox и с ординатната ос Oy на правоъгълната координатна система Oxy ; C е пресечната точка на правата AB с Oy.

а) Ако P е точката от π с абсциса $\dfrac{-f(9)}{5}$, да се намерят разстоянията от A до P и от A до g.

б) Нека M е точката от g с ордината $\dfrac{f'(0)}{5}$, а N е точка от отсечката CM, такава че $CN : NM = 3 : 2$. Да се докаже, че правите MA, CD и BN се пресичат в една точка.

ДЕВЕТИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР ЗА УЧЕНИЦИ ОТ XI И XII КЛАС

13 МАРТ 2016 г.

ПЪРВА ТЕМА

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

ОТГОВОРИ НА ЗАДАЧИ ОТ 1. ДО 12.

№	А	Б	В	Г
1	А			
2		Б		
3				Г
4			В	
5		Б		
6				Г
7	А			
8				Г
9			В	
10	А			
11				Г
12		Б		

ОТГОВОРИ НА ЗАДАЧИ ОТ 13. ДО 17.

13.	4
14.	1
15.	$42\,cm$
16.	$5\,cm$
17.	$10\,cm$

Задача 18. Дефиниционното множество на неравенството са решенията на системата:

$$\left|\begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \dfrac{4x+5}{6-5x} > 0 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (0;1) \cup \left(1;\frac{6}{5}\right).$$

Първи случай: $x \in (0;1)$. Даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\frac{4x+5}{6-5x} > \frac{1}{x}, \text{ чието решение е } x \in (-3;0) \cup \left(\frac{1}{2};\frac{6}{5}\right).$$

Решението в този случай е $x \in \left(\frac{1}{2};1\right)$.

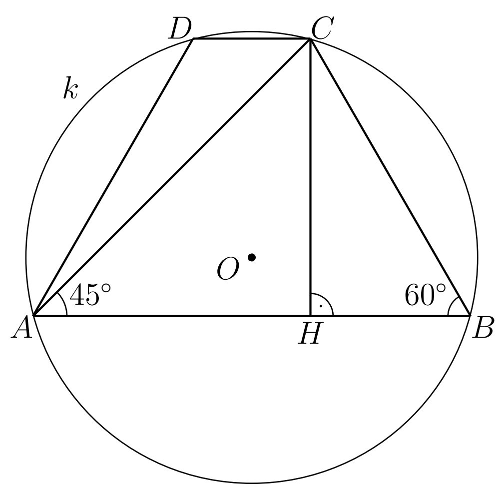
Втори случай: $x \in \left(1;\frac{6}{5}\right)$. Даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\frac{4x+5}{6-5x} < \frac{1}{x}, \text{ чието решение е } x \in (-\infty;-3) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{6}{5};+\infty\right).$$

Следователно в този случай неравенството няма решение.

Крайното решение е $x \in \left(\frac{1}{2};1\right)$.

Задача 19.



Трапецът $ABCD$ е вписан в окръжност k, следователно той е равнобедрен. За триъгълника ABC, вписан в k, прилагаме синусовата теорема и получаваме $BC = R\sqrt{2}$. Нека CH ($H \in AB$) е височината на трапеца. От правоъгълния триъгълник BHC намираме $CH = \dfrac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Триъгълникът AHC е правоъгълен и равнобедрен. Тогава

$$CH = AH = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

За лицето S на трапеца $ABCD$ получаваме

$$S = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot CH = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3R^2}{2}.$$

Задача 20. От това, че околните ръбове на пирамидата са равни, следва, че ортогоналната проекция на върха M върху равнината на основата е средата O на хипотенузата AB.

От правоъгълния триъгълник AOM намираме:

· $MO = l\sin\alpha$, където MO е височината на пирамидата ;

· $AO = l\cos\alpha$.

Построяваме височината MN ($N \in BC$) в равнобедрения триъгълник BCM. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $ON \perp BC$ и оттук $\sphericalangle ONM = \beta$. От правоъгълния триъгълник MON получаваме $ON = \dfrac{l\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$.

За правоъгълния триъгълник ABC имаме:

· $AC = 2ON = \dfrac{2l\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$, тъй като ON е средна отсечка в триъгълника ABC;

· $AB = 2AO = 2l\cos\alpha$.

· по Питагоровата теорема намираме $BC = \dfrac{2l}{\sin\beta}\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$.

Ще обосновем, че $\beta > \alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{MO}{l}, \quad \sin\beta = \frac{MO}{MN}.$$

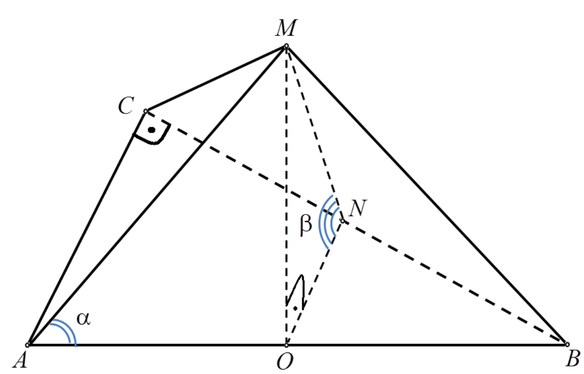
Но от $MN < l$ следва $\sin\beta > \sin\alpha$. Тъй като $\alpha, \beta \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и функцията $\sin x$ е растяща в този интервал, то $\beta > \alpha$.

Лицето на основата на пирамидата е

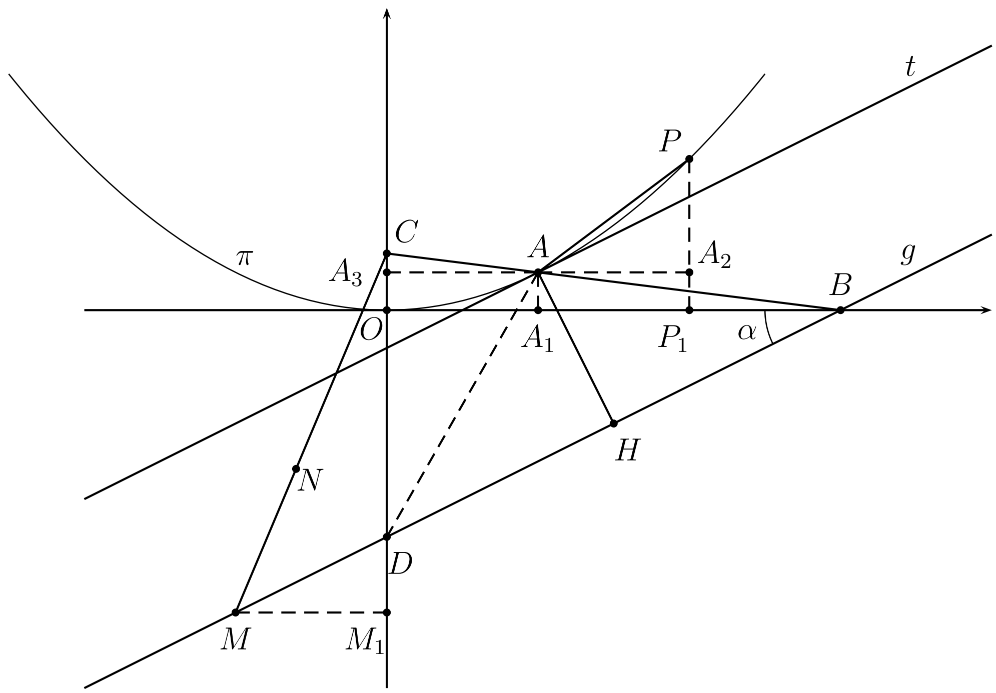
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{2l^2\sin\alpha}{\sin\beta\operatorname{tg}\beta}\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}.$$

Обемът на пирамидата е

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot MO = \frac{2l^3\sin^2\alpha\cos\beta}{3\sin^2\beta}\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}.$$



Допълнителна задача 21.



а) С x_L и y_L ще означаваме координатите на произволна точка L от равнината Oxy. От геометричния смисъл на производна на функция в точка следва, че $y'(x_A) = \operatorname{tg}\alpha$, където α е ъгълът, който допирателната t към параболата π в точката A сключва с положителната посока на абсцисната ос Ox. За координатите на пресечните точки B и D на g съответно с Ox и Oy намираме $x_B = 3,\ y_B = 0$ и $x_D = 0,\ y_D = -\dfrac{3}{2}$. Тъй като t и g са успоредни, то $\sphericalangle OBD = \alpha$. От правоъгълния триъгълник BOD намираме $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{1}{2}$. Но $y'(x) = \dfrac{x}{2}$ и следователно $x_A = 1$, а $y_A = \dfrac{1}{4}$. За намиране координатите на точката P пресмятаме

$$f(9) = 9^{2016} - (9+1)9^{2015} + (9+1)9^{2014} - \cdots + (9+1)9^2 - (9+1)9 - 1 = -10$$

и получаваме $x_P = 2$, а $y_P = 1$. Дотук намерихме:

$$A\left(1; \frac{1}{4}\right), \quad B(3;0), \quad D\left(0; -\frac{3}{2}\right), \quad P(2;1).$$

С A_1 и P_1 означаваме ортогоналните проекции съответно на A и P върху Ox, а с A_2 - ортогоналната проекция на A върху PP_1. От правоъгълния триъгълник AA_2P по Питагоровата теорема намираме

$$AP = \sqrt{AA_2^2 + A_2P^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

Построяваме $AH \perp g$ ($H \in g$). От правоъгълния триъгълник AA_1B по Питагоровата теорема получаваме

$$AB = \sqrt{AA_1^2 + A_1B^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{65}}{4}.$$

С A_3 означаваме ортогоналната проекция на A върху Oy. От правоъгълния триъгълник AA_3D намираме

$$AD = \sqrt{AA_3^2 + A_3D^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{4}.$$

Следователно $\triangle BDA$ $(AB = AD)$ е равнобедрен и H е средата на отсечката BD. От правоъгълния триъгълник BOD определяме

$$BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Разстоянието AH от A до g намираме от правоъгълния триъгълник AHB:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{65}}{4}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

б) По условие $y_M = \dfrac{f'(0)}{5} = \dfrac{-10}{5} = -2$. Точката M е от правата g и следователно $x_M - 2y_M - 3 = 0$. Тогава $x_M = -1$. От подобието на $\triangle BA_1A$ и $\triangle BOC$ получаваме

$$\frac{A_1A}{OC} = \frac{BA_1}{BO} \iff \frac{1/4}{OC} = \frac{2}{3} \iff OC = \frac{3}{8}.$$

За раменете на $\sphericalangle CBO$ и успоредните прави AA_1 и CO по теоремата на Талес е в сила следното отношение

$$\frac{BA}{AC} = \frac{BA_1}{A_1O} = \frac{2}{1}. \tag{1}$$

С M_1 означаваме ортогоналната проекция на M върху Oy и от правоъгълния триъгълник MM_1D намираме

$$MD = \sqrt{MM_1^2 + M_1D^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Тогава

$$\frac{MD}{DB} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{3}. \tag{2}$$

Съгласно (1), (2) и условието $\dfrac{CN}{NM} = \dfrac{3}{2}$, за $\triangle BCM$ се получава

$$\frac{BA}{AC} \cdot \frac{CN}{NM} \cdot \frac{MD}{DB} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

Съгласно теоремата на Чева за $\triangle BCM$ правите MA, BN и CD се пресичат в една точка.

Задача 18.

Намерено ДМ .... 3 точки
Решено неравенството в първия случай .... 5 точки
(2 точки за преобразуване в рационално неравенство и 3 точки за решаването му)
Решено неравенството във втория случай .... 5 точки
(2 точки за преобразуване в рационално неравенство и 3 точки за решаването му)
Решено даденото неравенство .... 2 точки

Задача 19.

Доказано, че трапецът $ABCD$ е равнобедрен .... 2 точки
Намерено BC или AC .... 4 точки
Намерена височината CH на трапеца .... 2 точки
Намерено AH (2 точки) и изразено $\frac{1}{2}(AB + CD)$ (3 точки) ....
или намерени AB и CD .... 5 точки
Намерено лицето на трапеца $ABCD$ .... 2 точки

Задача 20.

Верен чертеж на пирамидата .... 2 точки
Обоснована точка O .... 2 точки
Обоснован ъгъл β .... 2 точки
Намерена височината MO на пирамидата .... 2 точки
Намерени AB, AC и BC или AC и BC .... 4 точки
Доказано неравенството $\beta > \alpha$ .... 2 точки
Намерен обемът на пирамидата .... 1 точка

Допълнителна задача 21.

а) .... 14 точки:
Намерени координатите на точка B .... 1 точка
Намерени координатите на точка D .... 1 точка
Намерени координатите на точка A .... 3 точки
(за x_A - 2 точки, за y_A - 1 точка)
Намерени координатите на точка P .... 3 точки
(за $f(9)$ - 2 точки, за y_P - 1 точка)
Намерено AP .... 2 точки
Намерено AH .... 4 точки
(построено AH - 1 точка, пресметнато AH - 3 точки)
б) .... 6 точки:
Намерени координатите на точка M .... 1 точка
Намерено OC .... 2 точки
Намерени отношенията по страните на $\triangle BCM$ .... 2 точки
Приложена теоремата на Чева .... 1 точка