



Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“
Седемнадесети математически турнир на ВТУ – 10 март 2024 г.

СЪСТЕЗАТЕЛНА ТЕМА

10 март 2024 г.

УВАЖАЕМИ УЧАСТНИЦИ В ТУРНИРА,

Тестът съдържа **21 задачи** по математика, като последната е задача на Журито.

Първите 12 задачи (от 1. до 12. включително) в теста са от затворен тип с четири предложени отговора, отбелязани с главните букви А, Б, В, Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте с химикал със син цвят в **листа за отговори**, а не върху теста. За да отбележите верния отговор, зачертайте със знака \times кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

А Б В Г

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и зачертайте буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

А Б В Г

За всяка задача се допуска не повече от една корекция.

Отговорите на задачите със **свободен отговор от 13. до 17. включително** запишете в **листа за отговори**.

На задачите със **свободен отговор 18., 19., 20. и 21.** напишете пълните решения с необходимите обосновки в **листите за белова**.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачи от 1. до 12. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Най-голямото от следните четири числа е:
 А) $\cos 150^\circ$ Б) $(0,5 \cdot \sqrt[3]{27})^{-2}$ В) 5% от 8 Г) $\log_2 \frac{1}{8}$ 2 т.
2. Дефиниционното множество на функцията $f(x) = \log_{x+1} \sqrt{x^2 - 16}$ е:
 А) $[-4; 4]$ Б) $(-1; +\infty)$ В) $(0; +\infty)$ Г) $(4; +\infty)$ 2 т.
3. Ако $a = \log_2 40$, $b = \log_2 100$ и $c = 2a - b$, то стойността на c е:
 А) 5 Б) 4 В) 3 Г) 2 2 т.
4. Числата a_1, a_2, \dots, a_{17} образуват геометрична прогресия. Известно е, че $\frac{a_7}{a_5} = 3$.
 Тогава $\sqrt{\frac{a_{17}}{a_1}}$ е равно на:
 А) 81 Б) 243 В) 729 Г) 2024 3 т.
5. Изразът $\frac{\sin 42^\circ \sin 56^\circ - \sin 48^\circ \sin 34^\circ}{\cos 24^\circ \cos 74^\circ - \cos 66^\circ \cos 16^\circ}$ е равен на:
 А) -1 Б) 0 В) 1 Г) -2 3 т.
6. Хорда пресича диаметър на окръжност под ъгъл 30° и го дели на отсечки с дължини 4 cm и 12 cm. Разстоянието от центъра на окръжността до хордата е:
 А) 1 cm Б) 2 cm В) 2,5 cm Г) 3 cm 3 т.
7. За триъгълник ABC е дадено, че $AC = 8$ cm, $AB = 10$ cm и $BC = 12$ cm. Ако CL е ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ ($L \in AB$), то тогава BL е равна на:
 А) 6 cm Б) 7 cm В) 8 cm Г) 9 cm 2 т.
8. Даден е успоредник $ABCD$ с лице 60 m². Нека M е средата на страната AB и N е пресечната точка на AC и DM . Лицето на четириъгълника $MBCN$ е равно на:
 А) 15 m² Б) 20 m² В) 25 m² Г) 30 m² 2 т.
9. Дадени са три окръжности, всяка с радиус 2 и всяка от които минава през центровете на другите две. Лицето на фигурата, образувана от всички точки, които са вътрешни едновременно и за трите окръжности е равно на:
 А) $2\pi - \sqrt{3}$ Б) $\pi - \sqrt{3}$ В) $\pi + \sqrt{3}$ Г) $2\pi - 2\sqrt{3}$ 2 т.
10. Височината на правилна триъгълна пирамида е равна на основния ръб. Ако обемът на пирамидата е $\frac{9\sqrt{3}}{4}$, то ръбът на пирамидата е:
 А) 9 Б) $9\sqrt{3}$ В) $\sqrt{3}$ Г) 3 3 т.

11. Колко прави, лежащи в една равнина, от които никои 3 нямат обща точка и никои две не са успоредни, се пресичат в 55 точки?

А) 10 Б) 15 В) 11 Г) 22 3 т.

12. От множеството $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ се избира по случаен начин двойка различни числа (a, b) и се съставя квадратната функция

$$f_{(a,b)}(x) = x^2 - (a + b + 2)x + ab + 2b.$$

Да се намери вероятността за събъждане на събитието

$$A = \{ \text{Уравнението } f_{(a,b)}(x) = 0 \text{ има четни корени} \}.$$

А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) $\frac{2}{3}$ Г) $\frac{3}{2}$ 3 т.

Отговорите на задачи от 13. до 17. включително отбелязвайте в листа за отговори!

13. В правоъгълен триъгълник ABC височината CC_1 разделя хипотенузата AB на части с дължини $AC_1 = m$ и $BC_1 = n$. Да се намерят дължините на медианите AA_1 и BB_1 . 5 т.

14. Единият от ъглите на триъгълника ABC е с мярка 120° и страните му a, b, c в този ред са последователни членове на растяща аритметична прогресия. Ако периметърът на $\triangle ABC$ е 15 cm , да се намери лицето му. 5 т.

15. Основите на равнобедрения трапец $ABCD$ са $AB = 12\text{ cm}$, $CD = 8\text{ cm}$ и дължината на бедрото му е тяхното средногеометрично. Да се намери тангенсът на острия ъгъл φ между диагоналите AC и BD . 5 т.

16. Дадена е функцията $f(x) = x^2 - x + 1$. Да се реши неравенството

$$2^{f(-x)+f(x)} > 4^{f(2x)-2x}.$$

5 т.

17. С цифрите 0, 1, 3, 5 и 7 са записани всички четирицифрени числа с неповтарящи се цифри. Да се намери вероятността случайно избрано от тях число да се дели на 5. 5 т.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачи 18., 19., 20. и 21. запишете в листите за белава!

18. В триъгълник е вписана окръжност, центърът на която е свързан с върховете на триъгълника. Лицата на получените триъгълници са 28,60, 80.
Да се намерят страните на триъгълника. 15 т.
19. Да се реши уравнението $3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} + 2 \cdot 3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x}$. 15 т.
20. Зар се хвърля 6 пъти. Да се намери вероятността повече от 3 пъти да се падне число, което се дели на 3. 15 т.

21. Задача на журито

Дадена е квадратната функция $f(x) = 1 + x + x^2$.

а) Да се докаже, че най-голямата стойност на функцията $F(x) = \log_{(4-2\sqrt{3})} f(x)$ е

$$\log_{(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12})} \left(\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

б) Да се намери стойността $M = K_{12} \cdot (W_4)^{-1}$, където K_{12} е коефициентът пред x^{12} в нормалния вид на полинома $P(x) = [f(x)]^{10}$, а W_4 е броят на всички четирибуквени думи без повтарящи се символи, съставени с първите 10 букви на избрана азбука.

20 т.

ОТГОВОРИ на ЗАДАЧИ от 1. до 12. и от 13. до 21.

№	А	Б	В	Г	Точки
1.		ⓑ			2 т.
2.				ⓐ	2 т.
3.		ⓑ			2 т.
4.	ⓐ				3 т.
5.	ⓐ				3 т.
6.		ⓑ			3 т.
7.	ⓐ				2 т.
8.			ⓑ		2 т.
9.				ⓐ	2 т.
10.				ⓐ	3 т.
11.			ⓑ		3 т.
12.	ⓐ				3 т.

№	Отговор	Точки
13.	$AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2 + n^2 + 5m.n}$, $BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + 4n^2 + 5m.n}$	5 т.
14.	$S_{\Delta ABC} = 15\frac{\sqrt{3}}{4}$	5 т.
15.	$\operatorname{tg} \varphi = 5\sqrt{23}$	5 т.
16.	$x \in (0, \frac{4}{3})$	5 т.
17.	$P = \frac{7}{16}$	5 т.
18.	14, 30, 40	15 т.
19.	$x_1 = \frac{\pi}{2} + k.\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + k.\pi$	15 т.
20.	$P = \frac{73}{729}$	15 т.
21.	$M = \frac{451}{336}$	20 т.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ на ЗАДАЧИ 18., 19., 20. и 21.

18. В триъгълник е вписана окръжност, центърът на която е свързан с върховете на триъгълника. Лицата на получените триъгълници са 28, 60, 80. Да се намерят страните на триъгълника. 15 т.

ПРИМЕРНО РЕШЕНИЕ на ЗАДАЧА 18.

Нека даденият триъгълник е ABC със страни $a < b < c$, нека O е центърът на вписаната в него окръжност и r е нейният радиус. От условието следва, че

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\Delta OBC} = 28 \\ S_{\Delta OCA} = 60 \\ S_{\Delta OAB} = 80 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{a \cdot r}{2} = 28 \quad (1) \\ \frac{b \cdot r}{2} = 60 \quad (2) \\ \frac{c \cdot r}{2} = 80 \quad (3) \end{array} \right. .$$

След събиране на трите равенства се получава

$$S_{\Delta ABC} = p \cdot r = 168 \quad (4).$$

От (1), (2), (3) и (4) се изразяват: $a = \frac{56}{r}$, $b = \frac{120}{r}$, $c = \frac{160}{r}$ и полупериметърът $p = \frac{168}{r}$.

След заместване във формулата на Херон се стига до

$$\underbrace{S_{\Delta ABC}}_{=168} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{168}{r} \left(\frac{168-56}{r} \right) \left(\frac{168-120}{r} \right) \left(\frac{168-160}{r} \right)} \iff$$

$$168 = \frac{1}{r^2} \sqrt{168 \cdot 112 \cdot 48 \cdot 8} \iff r^2 = \frac{\sqrt{168 \cdot 112 \cdot 48 \cdot 8}}{168} \iff r = 4.$$

След заместване в изразите за страните се получават:

$$a = \frac{56}{r} = \frac{56}{4} = 14, \quad b = \frac{120}{r} = \frac{120}{4} = 30, \quad c = \frac{160}{r} = \frac{160}{4} = 40.$$

19. Да се реши уравнението $3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} + 2 \cdot 3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x}$. 15 т.

ПРИМЕРНО РЕШЕНИЕ на ЗАДАЧА 19.

$$3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} + 2 \cdot 3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x} \iff 3 \cdot 3^{-2 \sin^2 x} + 2 \cdot 3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x}$$

$$\iff 3^{1-2 \sin^2 x} + 2 \cdot 3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x} \iff 3^{\cos 2x} + 2 \cdot 3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x} \iff 3^{1+\cos 2x} = 3^{\sin 2x}$$

$$\iff 1 + \cos 2x = \sin 2x \iff \sin 2x - \cos 2x = 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \iff \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\implies x \in \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right), n \in \mathbb{Z} \right\} \iff x = (4n+1)\frac{\pi}{4} \cup x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

20. Зар се хвърля последователно шест пъти. Да се намери вероятността повече от три пъти да се появят числа, които се делят на три.

15 т.

ПРИМЕРНО РЕШЕНИЕ на ЗАДАЧА 20.

Задачата се моделира чрез схема на Бернули – равновероятно появяване на събитие (успех) при всеки опит от серия повтарящи се опити. Оттук вероятността за k успеха при серия от n опита е $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k q^{n-k}$, където p е вероятността за успех при всеки опит и $q = 1 - p$ е вероятността за неуспех при всеки опит, а $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ са комбинациите без повторения от n елемента k -ти клас. Конкретно за задачата $n = 6$, $k = 4, 5, 6$ и $p = P(A)$, където $A = \{3, 6\}$ – два изхода за число, което се дели на 3 от общо 6 възможни, т.е. $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ и $q = 1 - p = \frac{2}{3}$. Тогава търсената вероятност е

$$P = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = \underbrace{C_6^4}_{=15} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2}_{\frac{4}{3^6}} + \underbrace{C_6^5}_{=6} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)}_{\frac{2}{3^6}} + \underbrace{C_6^6}_{=1} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^6}_{\frac{1}{3^6}} = \frac{60 + 12 + 1}{3^6} = \frac{73}{729}.$$

21. Задача на журито

20 т.

Дадена е функцията $f(x) = 1 + x + x^2$.

а) Да се докаже, че най-голямата стойност на функцията $F(x) = \log_{(4-2\sqrt{3})} f(x)$ е

$$\log_{(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12})} \left(\sin \frac{\pi}{3} \right).$$

б) Да се намери стойността $M = K_{12} \cdot (W_4)^{-1}$, където K_{12} е коефициентът пред x^{12} в нормалния вид на полинома $P(x) = [f(x)]^{10}$, а W_4 е броят на всички четирибуквени думи без повтарящи се символи, съставени с първите 10 букви на избрана азбука.

ПРИМЕРНО РЕШЕНИЕ на ЗАДАЧА 21.

а) Логаритмичната функция $F(x)$ е дефинирана за всяко $x \in \mathbb{R}$ понеже $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (дискриминантата на $f(x)$ е $D_f = -3 < 0$ и параболата $p : y = f(x)$ е насочена по направлението на ординатата Oy от декартовата координатна система Oxy). Понеже основата на логаритъма е $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2 \in (0, 1) \implies$ монотонността на $F(x) - \searrow (\nearrow)$ е противоположна на тази на $f(x)$ в съответните интервали.

$$\text{Параболата на } f(x) \text{ има връх } V\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \implies \begin{cases} f(x) \searrow & \text{за } x \leq -\frac{1}{2} \\ f(x) \nearrow & \text{за } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Тогава $F(x) \nearrow$ за $x \leq -\frac{1}{2}$, $F(x) \searrow$ за $x \geq -\frac{1}{2}$ и при $x = -\frac{1}{2}$ се достига НГС $F(x)$.

$$\implies \underline{\underline{\text{НГС } F(x)}} = \log_{4-2\sqrt{3}} \left(\text{НМС } f(x) \right) = \log_{(\sqrt{3}-1)^2} f\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\log_{(\sqrt{3}-1)} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}.$$

Основата $(\sqrt{3} - 1)$ на логаритъма има следното тригонометрично представяне:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sqrt{3} - 1}} &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \underline{\underline{2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}}}, \end{aligned}$$

а това на аргумента му е $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$. Така НГС $F(x) = \log_{(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12})} \left(\sin\frac{\pi}{3} \right)$.

$$б) \quad [f(x)]^{10} = \underbrace{(1+x+x^2)(1+x+x^2)\dots(1+x+x^2)}_{10 \text{ множителя}}$$

Тогава x^{12} се получава от избора на:

- x^2 от 6 множителя, т.е. по C_{10}^6 начина и 1 от останалите 4 множителя,
- x^2 от 5 множителя и x от 2 множителя, т.е. по $C_{10}^5 \cdot C_{10-5}^2$ начина и 1 от останалите 3 множ.,
- x^2 от 4 множителя и x от 4 множителя, т.е. по $C_{10}^4 \cdot C_{10-4}^4$ начина и 1 от останалите 2 множ.,
- x^2 от 3 множителя и x от 6 множителя, т.е. по $C_{10}^3 \cdot C_{10-3}^6$ начина и 1 от останалите 1 множ.,
- x^2 от 2 множителя и x от 8 множителя, т.е. по $C_{10}^2 \cdot C_{10-2}^8$ начина.

$$\begin{aligned} \text{Тогава} \quad K_{12} &= C_{10}^6 + C_{10}^5 \cdot C_{10-5}^2 + C_{10}^4 \cdot C_{10-4}^4 + C_{10}^3 \cdot C_{10-3}^6 + C_{10}^2 \cdot C_{10-2}^8 \\ &= \frac{10!}{6!4!} + \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{5!}{2!3!} + \frac{10!}{4!6!} \cdot \frac{6!}{2!4!} + \frac{10!}{7!3!} \cdot \frac{7!}{6!1!} + \frac{10!}{2!8!} \end{aligned}$$

От условието следва, че W_4 е равно на броя на наредените 4-елементни подмножества на множество с 10 елемента, т.е. на броя на вариациите от 10 елемента 4-ти клас.

$$\Rightarrow W_4 = V_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!}. \quad \text{Оттук за търсената стойност } M \text{ се получава}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}} &= K_{12} \cdot (W_4)^{-1} = \frac{6!}{10!} \left(\frac{10!}{6!4!} + \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{5!}{2!3!} + \frac{10!}{4!6!} \cdot \frac{6!}{2!4!} + \frac{10!}{7!3!} \cdot \frac{7!}{6!1!} + \frac{10!}{2!8!} \right) \\ &= \frac{1}{4!} + \frac{1}{2!} + \frac{5}{2! \cdot 4} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2! \cdot 7 \cdot 8} = \frac{1}{2!} \left(\underbrace{\frac{1}{3 \cdot 4} + 1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7 \cdot 8}}_{=\frac{8}{3}} \right) = \frac{7 \cdot 8 \cdot 8 + 3}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8} = \underline{\underline{\frac{451}{336}}}. \end{aligned}$$

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ за ОЦЕНЯВАНЕ на ЗАДАЧИ 18., 19., 20. и 21.

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ за ОЦЕНЯВАНЕ на ЗАДАЧА 18.

Изразяване на страните и полупериметърът чрез r	6 т.
Заместване във формулата на Херон и изразяване на r	5 т.
Намиране на страните	4 т.

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ за ОЦЕНЯВАНЕ на ЗАДАЧА 19.

Привеждане на показателните събираеми към една и съща основа	5 т.
Съставяне на тригонометрично уравнение чрез степенните показатели	5 т.
Решаване на полученото тригонометрично уравнение	5 т.

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ за ОЦЕНЯВАНЕ на ЗАДАЧА 20.

Обосноваване на вероятностния модел (например чрез схема на Бернули) и определяне на параметрите	5 т.
Записване на търсената вероятност чрез сумата от конкретни вероятности за успех ..	5 т.
Записване на формулите за вероятностните събираеми и изчисляване на сумата	5 т.

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ за ОЦЕНЯВАНЕ на ЗАДАЧА 21.

а) 10 т.

Обосновка за ДМ за $F(x)$	2 т.
Връзка между монотонното поведение на $F(x)$ и това на $f(x)$	4 т.
Намиране на НГС $F(x)$	2 т.
Представяне на НГС $F(x)$ чрез стойности на тригонометрични функции	2 т.

б) 10 т.

Изброяване на всички възможни случаи за получаване на x^{12} от $[f(x)]^{10}$	4 т.
Представяне на K_{12}	2 т.
Представяне на W_4	2 т.
Намиране на M	2 т.

Забележки

- При вярна логическа конструкция с допусната техническа грешка се отнема еднократно една точка. Всеки записан, но немотивиран резултат не носи точки.
- При забелязване на алогизми от типа “грешно \implies вярно” се прекратява разглеждането на съответното решение.